

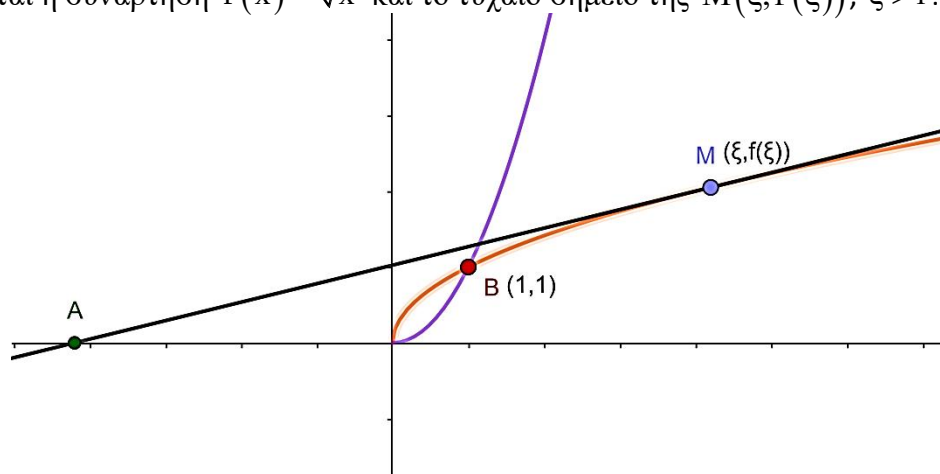
Ασκησόπολις ο πιο πλούσιος κόσμος θεμάτων και ασκήσεων ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

2018
2019

**Μαθηματικά Γ Λυκείου Προσανατολισμού Θετικών σπουδών και σπουδών
 Οικονομίας και Πληροφορικής**

5ο Πρόβλημα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το τυχαίο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$, $\xi > 1$.



α) Να βρείτε την εφαπτομένη ευθεία ε_{AM} της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M καθώς και το σημείο τομής της με τον άξονα $x'x$

β) Έστω B το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με την αντίστοιχη της f . Να βρεθεί ο τύπος της f^{-1} και να σχεδιάσετε την $f \circ f^{-1}$.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται τα σημεία O, M όπου O η αρχή των αξόνων.

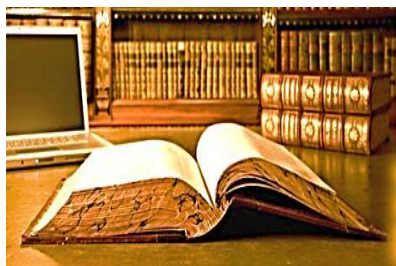
δ) Έστω $g(\xi) = y_{OM}$, όπου $y_{OM} = \frac{\sqrt{\xi}}{\xi} x$ η ευθεία του ερωτήματος γ. Να υπολογίσετε το $\lim_{\xi \rightarrow 1} g(\xi)$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

ε) Έστω $\xi = 1$. Να εξηγήσετε γιατί τα σημεία M και B ταυτίζονται.

i. Αν M' η προβολή του σημείου M πάνω στον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι $\frac{(AMM')}{(OMM')} = 2$

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση της εφαπτομένης ευθείας της f στο M , από τη αρχή των αξόνων.

Η ΛΥΣΗ ΘΑ ΔΟΘΕΙ ΜΕ ΤΗΝ ΑΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ΕΚΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΣΕΙΡΑΣ "ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ"



Ασκησόπολις ο πιο πλούσιος κόσμος θεμάτων και ασκήσεων ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

2018
2019

Λύση 4ου Προβλήματος

α. $(MABK) = \beta \cdot v = AB \cdot AM$. Για το μήκος της πλευράς AB έχουμε ότι αν O είναι η αρχή των αξόνων τότε $AB = OA + OB = |x| + |x| = 2|x|$. Για το ύψος AM ισχύει ότι

$$AM = |f(x)| = |\sqrt{1-x^2}| = \sqrt{1-x^2}. \text{ Άρα } (MABK) = 2|x| \cdot \sqrt{1-x^2} = E(x), x \in [-1, 1].$$

β. Εάν το εμβαδό του $MABK$ είναι μη μηδενικό, άρα $x \in (-1, 1)$ και $x \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή, θα έχουμε λόγω γραφικής παράστασης $0 < \sqrt{1-x^2} < 1$ (1). Επειδή $x \in (-1, 1) \Leftrightarrow 0 < |x| < 1 \Leftrightarrow 0 < 2|x| < 2$ (2). Πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2) κατα μέλη έχουμε ότι $0 < 2|x|\sqrt{1-x^2} < 2$. Άρα $0 < E(x) < 2$.

$$\gamma. \text{ Για } x = \frac{1}{2}, M\left(\frac{1}{2}, \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) \Leftrightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \text{ Άρα } \varepsilon_{\hat{AOM}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \text{ οπότε}$$

$\hat{AOM} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$. Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση g τέμνει τη διαγώνιο OM , αρχικά θα βρούμε την εξίσωση της διαγωνίου OM , η οποία είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων με συντελεστή διεύθυνσης $\sqrt{3}$, άρα $\varepsilon_{OM}: y = \sqrt{3}x$. Η

συνάρτηση g είναι μέσα στο τετράγωνο $OAMM'$ άρα $0 \leq g(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ (3). Αναζητώ

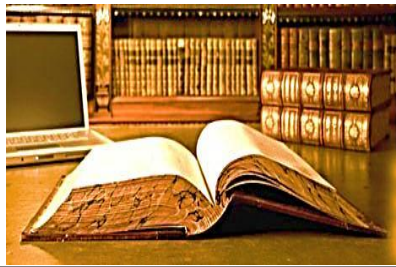
λύσεις της εξίσωσης $g(x) = y$. Θέτω $h(x) = g(x) - y = g(x) - \sqrt{3}x$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Η

συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ως διαφορά συνεχών.

$$h(0) = g(0) - \sqrt{3} \cdot 0 = g(0) \geq 0 \text{ λόγω της (3). } h\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \leq 0, \text{ λόγω της}$$

$$(3). \text{ Συνεπώς } h(0) \cdot h\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0.$$

Αν $h(0) \cdot h\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow h(0) = 0$ ή $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{1}{2}$ δηλαδή Η συνάρτηση g τέμνει τη διαγώνιο OM στα σημεία με τετμημένη $x = 0$ ή $x = \frac{1}{2}$



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων
ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

2018
2019

Αν $h(0)h\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ από θεώρημα του Bolzano υπάρχει τουλάχιστον $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow g(x_0) = \sqrt{3}x_0$.

Άρα σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση g τέμνει την διαγώνιο OM .